concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

Option A. - MATHÉMATIQUES

MAI 1995

première composition de mathématiques

DURÉE : 4 heures

Le sujet comprend 5 pages.

1. Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{C}$.

2. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $C_C^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivables à l'ordre k au moins et dont la fonction dérivée d'ordre k est continue sur $\mathbb{R}$. De même, $C_C^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de complexes indexée par $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs), et si les deux séries de termes généraux u_n et u_{-n} sont convergentes, on note :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

Le but des parties I et II du problème est d'établir la propriété suivante, dite formule de Poisson.

Soit $f \in C_C^2(\mathbb{R})$, telle que les trois intégrales généralisées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(t)|\,dt$$

soient convergentes. Posons, pour tout α réel :

$$G(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} f(t)\,dt.$$

Alors, on a l'égalité, pour tout x réel :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} G(n)\, e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi),$$

les séries introduites aux deux membres étant convergentes.

4. Les parties III et IV sont indépendantes l'une de l'autre et sont des applications des résultats des parties I et II.

PARTIE I

Dans cette partie $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ et on suppose les intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} |f'(t)|\,dt$$

convergentes.

1. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On pose dans la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad u_n(t) = f(t + 2n\pi).$$

2. Établir l'inégalité, valable pour tout t réel et pour tout n élément de $\mathbb{N}$:

$$\left| \int_{t+2n\pi}^{t+2(n+1)\pi} f(u)\,du - \pi\,[u_n(t) + u_{n+1}(t)] \right| \leqslant \pi \int_{t+2n\pi}^{t+2(n+1)\pi} |f'(u)|\,du.$$

On pourra, pour cela, intégrer par parties en considérant le changement de variable :

$$v = u - [t + (2n + 1)\pi].$$

3. En déduire que, pour t fixé, la série de terme général $[u_n(t) + u_{n+1}(t)]$ est convergente, puis que la série de terme général $u_n(t)$ l'est également.

On pose, dans la suite, $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.

4.*a.* Montrer, pour tout t réel, l'égalité :

$$2F(t) = f(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} [u_n(t) + u_{n+1}(t)].$$

b. Montrer, pour tout réel t, l'inégalité :

$$\left| \int_t^{+\infty} f(u)\,du - \pi\,[2F(t) - f(t)] \right| \leqslant \pi \int_t^{+\infty} |f'(u)|\,du,$$

et en déduire $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$.

c. Soit a un réel. Montrer que la série de fonctions de terme général $(u_n(t) + u_{n+1}(t))$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. On pourra, pour cela, utiliser I.2. pour majorer le reste de cette série.

d. Montrer que la série de terme général $u_n(t)$ converge uniformément vers $F(t)$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

e. En déduire que $F \in C_c^0(\mathbb{R})$.

5. Dans cette question, on suppose de plus que $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ et que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f''(t)|\,dt$ est convergente.

Montrer que $F \in C_c^1(\mathbb{R})$ et préciser sa dérivée.

PARTIE II

Dans toute cette partie, $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ et les intégrales généralisées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(t)|\,dt$$

sont supposées convergentes. On pose, pour n élément de $\mathbb{Z}$ et t réel :

$$u_n(t) = f(t + 2n\pi).$$

1. Montrer la convergence, pour t fixé, de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)$.

   (Dans le cas où $n < 0$, il pourra être commode d'introduire une fonction auxiliaire.)

   On pose dans la suite :

$$F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t).$$

2. Montrer que $F \in C_c^1(\mathbb{R})$ et que F admet 2π pour période.

3. On pose alors, comme indiqué dans le préambule, pour tout α réel :

$$G(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} f(t)\,dt.$$

   Justifier brièvement la convergence de l'intégrale définissant $G(\alpha)$.

4. Montrer que $\lim_{\alpha\to+\infty} G(\alpha) = \lim_{\alpha\to-\infty} G(\alpha) = 0$.

5. Montrer que $G \in C_c^0(\mathbb{R})$.

6. On suppose, dans cette question uniquement, que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,dt$ est convergente. Montrer que $G \in C_c^1(\mathbb{R})$.

7. Pour k élément de $\mathbb{Z}$, on pose :

$$c_k(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} F(t)\,dt.$$

   [$c_k(F)$ est donc le k-ième coefficient de Fourier exponentiel de la fonction F].

   Montrer que, pour tout k entier relatif :

$$c_k(F) = G(k).$$

8. Établir la formule de Poisson énoncée dans le préambule.

PARTIE III

Dans cette partie, les notations sont celles de la partie II, et, a désignant un élément de $]0, +\infty[$, on choisit f définie par l'égalité :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{-at^2}.$$

1. Montrer que f satisfait aux hypothèses de la formule de Poisson.

2. Montrer que $G \in C^1_C(\mathbb{R})$, où G est définie en II.3., et former une équation différentielle vérifiée par G.

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. On pourra, pour cela, intégrer $H(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ dans les trois domaines $[K_1(A)]$, $[K_2(A)]$, $[K_3(A)]$, où A désigne un réel tel que $A > 0$, et où, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant supposé orthonormé :
   - $K_1(A)$ est le carré ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $-A \leqslant x \leqslant A$ et $-A \leqslant y \leqslant A$;
   - $K_2(A)$ est le disque fermé ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $x^2 + y^2 \leqslant A^2$;
   - $K_3(A)$ est le disque fermé ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $x^2 + y^2 \leqslant 2A^2$.

   On observera que les intégrales relatives à $K_2(A)$ et $K_3(A)$ peuvent se calculer en coordonnées polaires.

4. Expliciter G et en déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, a > 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2}{4a}}\, e^{inx} = 2\sqrt{a\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x+2n\pi)^2 a}.$$

5. Pour $t > 0$, on pose :

$$\phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t}.$$

   a. Justifier la convergence, pour $t > 0$ fixé, de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t}$.

   b. Montrer que la série de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $u_n(t) = e^{-n^2 t}$, converge normalement sur $[b, +\infty[$, où b est un réel strictement positif.
   En déduire que ϕ est continue sur $]0, +\infty[$.

   c. Montrer que ϕ est dérivable et a une dérivée première continue sur $]0, +\infty[$.

   d. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t)$.

   e. Démontrer l'égalité :

$$\forall\, t > 0, \quad \phi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, \phi\left(\frac{\pi^2}{t}\right).$$

   En déduire un équivalent très simple de $\phi(t)$ lorsque $t \to 0$ par valeurs positives.

PARTIE IV

Les notations sont encore celles de la partie II, mais on définit cette fois f par les égalités :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*, \quad f(t) = \frac{1}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}, \quad f(0) = \frac{1}{4}.$$

1. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et préciser les coefficients du développement considéré.

2. Montrer que f satisfait aux hypothèses de la formule de Poisson.

3. Montrer que :
$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad G(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}\sin^2\frac{t}{2}\cdot\cos\alpha t\,dt.$$

4. Justifier la convergence de l'intégrale :
$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

5. On calcule ici l'intégrale I précédente.

On définit pour cela une application h de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ par les égalités :
$$\forall\, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad h(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}, \quad h(0) = 0.$$

a. Montrer que h est dérivable à droite pour $t = 0$ et calculer $h'(0)$.

b. Montrer que h admet une dérivée première continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire la valeur de :
$$\lim_{\lambda \to +\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\sin\lambda t\,dt.$$

d. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale :
$$J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2p+1)t}{\sin t}\,dt,$$
dont on justifiera d'abord l'existence. On pourra pour cela étudier la différence $(J_{p+1} - J_p)$.

e. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale I.

6. Soit x un réel. Calculer l'intégrale :
$$I(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}\,dt.$$
En déduire la valeur de $G(\alpha)$. [On pourra, pour cela, intégrer par parties l'intégrale définissant $G(\alpha)$.]

7. Déduire de ce qui précède la formule suivante, valable pour x réel non entier :
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}}\frac{1}{(x+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}.$$

8. Calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.